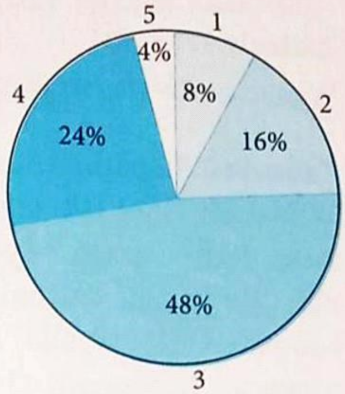
Zestaw C. Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

odpowiedzi i modele – s. 219

Zadanie 1. (2 pkt)
Na diagramie kołowym przedstawiono wyniki sprawdzianu z fizyki w klasie liczącej 25 uczniów.

a) Oblicz średnią ocen z tego sprawdzianu.

b) Ilu uczniów otrzymało ocenę wyższą od średniej?



Zadanie 2. (2 pkt)
Średnia arytmetyczna liczb: $5x$, 3, 5, 7, 6, 1, 5, $2x$ jest równa 6. Oblicz x oraz wyznacz medianę i dominantę tych liczb.

Zadanie 3. (2 pkt)
Średnia arytmetyczna liczb: 6, 7, 3, 9, 10, x, y jest równa 9. Oblicz x i y, jeśli mediana jest równa 8 i $y > x$.

Zadanie 4. (2 pkt)
Na wykresie przedstawiono liczbę mieszkań oddanych do użytku w kolejnych miesiącach 2009 roku.

a) Oblicz średnią miesięczną liczbę mieszkań oddanych do użytku w drugim półroczu 2009 roku.

b) Oblicz odchylenie standardowe miesięcznej liczby mieszkań oddanych do użytku w drugim półroczu 2009 roku.

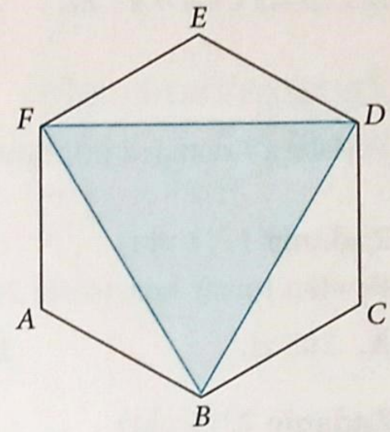
Zadanie 5. (2 pkt)
Ocena wystawiana na półrocze jest średnią ważoną, zaokrągloną do liczby całkowitej, ocen: z klasówek, z odpowiedzi ustnych i ze sprawdzianów. Który z uczniów A, B i C uzyskał najlepszą ocenę na półrocze?

	Klasówka 1	Klasówka 2	Odpowiedź 1	Odpowiedź 2	Sprawdzian
Waga	0,3	0,3	0,1	0,1	0,2
A	4	4	5	4	5
B	5	5	4	4	4
C	5	4	5	4	4

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1. a)	Obliczenie, ilu uczniów otrzymało daną ocenę: <table><tr><td>Ocena</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>Liczba uczniów</td><td>2</td><td>4</td><td>12</td><td>6</td><td>1</td></tr></table>
	Obliczenie średniej oceny: $\overline{x} = 3$
1. b)	Podanie odpowiedzi: Siedmiu uczniów otrzymało ocenę wyższą od średniej.
2.	Ułożenie i rozwiązanie równania: $\frac{7x+27}{8} = 6$; $x = 3$
	Podanie mediany i dominanty: $M = 5{,}5$, $D_1 = 5$, $D_2 = 6$
3.	Ułożenie równania $\frac{35+x+y}{7} = 9$ i obliczenie sumy: $x + y = 28$
	Zauważenie, że medianą jest jedna z szukanych liczb i podanie odpowiedzi: $x = 8$, $y = 20$
4. a)	Obliczenie średniej miesięcznej liczby mieszkań oddanych w II półroczu: $\overline{x} = 14$ tys.
4. b)	Obliczenie odchylenia standardowego: $\sigma \approx 1{,}63$ tys.
5.	Obliczenie średnich ważonych: $\overline{x}_A = 4{,}3$, $\overline{x}_B = 4{,}6$, $\overline{x}_C = 4{,}4$
	Zaokrąglenie wyników i podanie odpowiedzi: Najlepszą oceną była 5 i uzyskał ją uczeń B.

Zadania otwarte

Zadanie 26. (2 pkt)
Bok sześciokąta foremnego $ABCDEF$ ma długość 6 cm. Oblicz promień koła wpisanego w trójkąt BDF (rysunek obok).



Zadanie 27. (2 pkt)
Rozważmy wszystkie liczby czterocyfrowe, w których zapisie użyto cyfr: 1, 2, 3, 4 i cyfry te się nie powtarzają. Spośród tych liczb wylosowano jedną. Oblicz prawdopodobieństwo, że jest to liczba parzysta.

Zadanie 28. (2 pkt)
Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej o równaniu $4x + y + 1 = 0$ i przechodzącej przez punkt $P(4, 3)$.

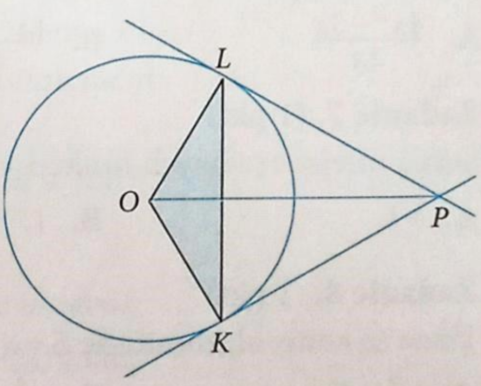
Zadanie 29. (2 pkt)
Rozwiąż równanie $x(2x^2 - 1) = 0$.

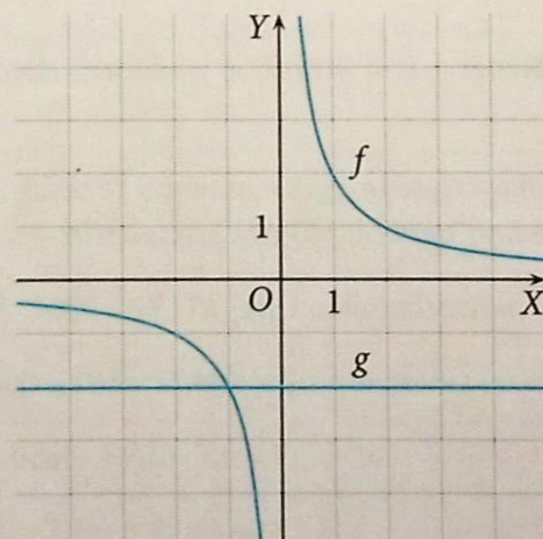
Zadanie 30. (2 pkt)
Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $f(x) = \frac{2}{x}$ i $g(x) = -2$. Odczytaj z rysunku argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartości większe od wartości funkcji g.

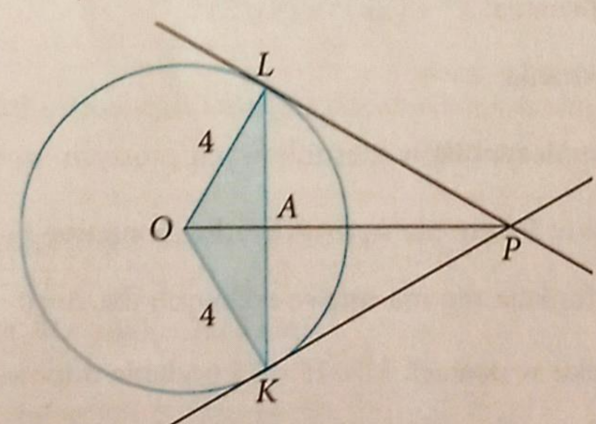
Zadanie 31. (5 pkt)
Punkt $A(4, 8)$ należy do okręgu, który jest styczny do osi OX w punkcie $B(4, 0)$. Oblicz różnicę między polem kwadratu wpisanego w ten okrąg a polem trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg.

Zadanie 32. (5 pkt)
Liczby: 3, b, c tworzą w podanej kolejności rosnący ciąg geometryczny. Te same liczby są w podanej kolejności pierwszym, drugim i piątym wyrazem ciągu arytmetycznego. Oblicz b i c.

Zadanie 33. (5 pkt)
Dany jest okrąg o środku O i promieniu 4. Z punktu P poprowadzono dwie styczne do tego okręgu w punktach K i L (rysunek obok). Wiedząc, że odległość punktu P od środka okręgu jest równa 8, oblicz pole trójkąta KOL.



Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
26.	Obliczenie wysokości trójkąta BDF lub długości jego boku: $h = 9$ cm, $a = 6\sqrt{3}$ cm
	Obliczenie promienia koła wpisanego w trójkąt BDF: $r = 3$ cm
27.	Obliczenie liczby zdarzeń elementarnych: $\overline{\overline{\Omega}} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
	Obliczenie liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A, gdzie A oznacza, że wylosowana liczba jest parzysta: $\overline{\overline{A}} = 12$; obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A: $P(A) = \frac{1}{2}$
28.	Obliczenie współczynnika kierunkowego szukanej prostej: $a = \frac{1}{4}$
	Wyznaczenie równania szukanej prostej: $y = \frac{1}{4}x + 2$
29.	Zapisanie równań: $x = 0$ lub $2x^2 - 1 = 0$
	Rozwiązanie równań: $x = 0$ lub $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
30.	Naszkicowanie wykresów funkcji f i g 
	Odczytanie odpowiedzi: $x \in (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
31.	Wyznaczenie długości promienia okręgu: $r = 4$
	Zauważenie zależności pomiędzy przekątną kwadratu i średnicą okręgu: $d = 8 = a\sqrt{2}$ oraz obliczenie pola kwadratu: $P = 32$
	Zauważenie zależności pomiędzy wysokością trójkąta równobocznego a promieniem okręgu: $\frac{2}{3}h = r = 4$ oraz wyznaczenie wysokości trójkąta: $h = 6$
	Obliczenie długości boku trójkąta: $a = 4\sqrt{3}$
	Obliczenie pola trójkąta: $P = 12\sqrt{3}$ oraz zapisanie różnicy pomiędzy polami: $32 - 12\sqrt{3}$
32.	Wyrażenie drugiego i trzeciego wyrazu ciągu geometrycznego za pomocą wyrazu pierwszego i ilorazu ciągu q: $b = 3q$, $c = 3q^2$
	Wyrażenie drugiego i piątego wyrazu ciągu arytmetycznego za pomocą różnicy ciągu r i wyrazów ciągu geometrycznego: $b = 3 + r$, $c = 3q + 3r$
	Zapisanie układu równań: $\begin{cases} 3q = 3 + r \\ 3q^2 = 3q + 3r \end{cases}$ i doprowadzenie do postaci $q^2 - 4q + 3 = 0$
	Rozwiązanie otrzymanego równania i wybór poprawnej odpowiedzi: $q = 3$
	Obliczenie wartości b i c: $b = 9$, $c = 27$
33.	Zauważenie, że $\lvert\sphericalangle OKP\rvert = \lvert\sphericalangle OLP\rvert = 90^\circ$ oraz, że trójkąty OKP i OLP są przystające 
	Wyznaczenie miary kąta KOP: $\lvert\sphericalangle KOP\rvert = 60^\circ$
	Obliczenie długości odcinków KA i KL: $\lvert KA\rvert = 2\sqrt{3}$, $\lvert KL\rvert = 4\sqrt{3}$
	Obliczenie długości odcinka OA: $\lvert OA\rvert = 2$
	Obliczenie pola trójkąta KOL: $P_{\triangle KOL} = 4\sqrt{3}$

Zadania otwarte

Zadanie 26. (2 pkt)
Na początku sierpnia ceny jabłek i gruszek w osiedlowym sklepie były takie same. W ciągu miesiąca cena gruszek spadła o 38%, a cenę jabłek dwukrotnie obniżono o 20%. Które owoce są tańsze po tych zmianach? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 27. (2 pkt)
Dany jest ciąg $a_n = \frac{n+1}{n}$. Wyznacz wzór ogólny ciągu $b_n = a_{n+1} - a_n$. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

Zadanie 28. (2 pkt)
W okrąg o promieniu $2\sqrt{5}$ wpisano trójkąt prostokątny, którego jedna przyprostokątna jest dwa razy dłuższa od drugiej. Oblicz długość krótszej przyprostokątnej.

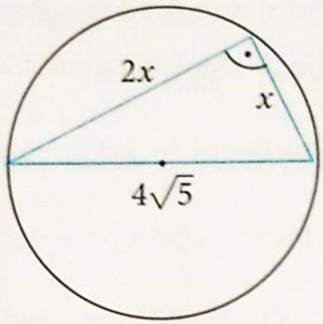
Zadanie 29. (2 pkt)
Uzasadnij, że prosta $y = x + 2$ nie jest prostopadła do prostej przechodzącej przez punkty $A(-1,3)$ i $B(-6,7)$.

Zadanie 30. (2 pkt)
Dla jakich wartości współczynnika k funkcja $y = x^2 - kx + 4$ nie ma miejsc zerowych?

Zadanie 31. (5 pkt)
Dany jest ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie równym 1. Suma początkowych dziesięciu wyrazów tego ciągu jest czterokrotnie większa od sumy początkowych pięciu wyrazów. Sprawdź, czy suma początkowych stu wyrazów tego ciągu jest większa od $10 \cdot 2^{10}$.

Zadanie 32. (4 pkt)
Dany jest trójkąt prostokątny o wierzchołkach: $A(8,3)$, $B(0,4)$, $C(2,0)$. Oblicz $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, jeżeli $\alpha = |\sphericalangle CAB|$ oraz $\beta = |\sphericalangle ABC|$.

Zadanie 33. (6 pkt)
Suma długości wszystkich krawędzi ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 54 cm. Wiedząc, że krawędź boczna tego ostrosłupa jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy, oblicz jego objętość.

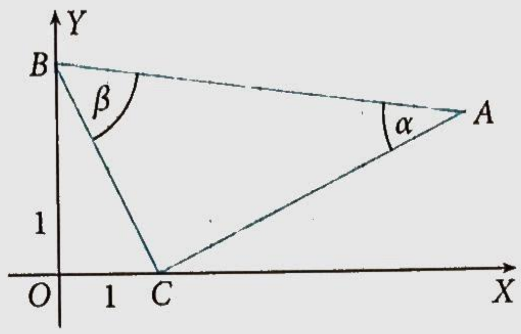
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
26.	Wyznaczenie cen jabłek i gruszek po obniżkach (x – cena przed obniżkami): gruszki – $0{,}62x$, jabłka – $0{,}64x$
	Porównanie cen i zapisanie wniosku: $0{,}62x < 0{,}64x$, zatem po obniżkach tańsze są gruszki.
27.	Wyznaczenie wyrazu a_{n+1}: $a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$
	Wyznaczenie wzoru ogólnego ciągu (b_n): $b_n = -\frac{1}{n(n+1)}$
28.	Zauważenie, że przeciwprostokątna trójkąta jest średnicą okręgu  oraz ułożenie równania: $x^2 + (2x)^2 = (4\sqrt{5})^2$
	Rozwiązanie równania: $x = 4$
29.	Wyznaczenie współczynników kierunkowych prostych: $a_1 = 1$, $a_2 = -\frac{4}{5}$
	Zapisanie wniosku: Proste nie są prostopadłe, ponieważ $a_1 \cdot a_2 \neq -1$.
30.	Zauważenie, że funkcja nie ma miejsc zerowych dla $\Delta < 0$
	Zapisanie warunku w postaci: $k^2 - 16 < 0$ i podanie odpowiedzi: $k \in (-4; 4)$
31.	Wyznaczenie sumy pięciu początkowych wyrazów ciągu: $S_5 = \frac{(2+4r)5}{2}$, gdzie r jest różnicą ciągu
	Wyznaczenie sumy dziesięciu początkowych wyrazów ciągu: $S_{10} = \frac{(2+9r)10}{2}$
	Wykorzystanie zależności $S_{10} = 4S_5$ i obliczenie różnicy ciągu r: $r = 2$
	Obliczenie sumy stu początkowych wyrazów ciągu: $S_{100} = 10000$
	Porównanie liczb: $10000 < 10 \cdot 2^{10} = 10240$ i podanie odpowiedzi

Numer zadania

Etapy rozwiązania zadania

32.

Wykonanie rysunku pomocniczego oraz wyznaczenie $\sin\alpha$ i $\sin\beta$: $\sin\alpha = \frac{|BC|}{|AB|}$, $\sin\beta = \frac{|AC|}{|AB|}$



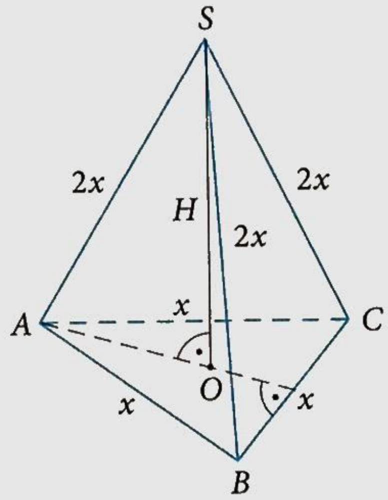
Zauważenie, że $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{|BC|}{|AC|}$

Obliczenie długości boków trójkąta: $|BC| = 2\sqrt{5}$, $|AC| = 3\sqrt{5}$

Obliczenie $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{2}{3}$

33.

Wykonanie rysunku pomocniczego



Obliczenie długości krawędzi ostrosłupa: krawędź podstawy $x = 6$ cm, krawędź boczna $2x = 12$ cm

Obliczenie pola podstawy ostrosłupa: $P_P = 9\sqrt{3}$ cm^2

Obliczenie długości odcinka AO: $|AO| = 2\sqrt{3}$ cm

Obliczenie wysokości ostrosłupa: $H = 2\sqrt{33}$ cm

Obliczenie objętości ostrosłupa: $V = 18\sqrt{11}$ cm^3